SESSION 2004

Concours commun Mines-Ponts

PREMIERE EPREUVE. FILIERE MP

Première partie

Variations de la fonction φ :

1. Quand t tend vers 0,

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{Arctan} t}{e^{\pi t} - 1} \sim \frac{t}{\pi t} = \frac{1}{\pi}.$$

Donc, φ se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \dfrac{1}{\pi}$.

2. φ est dérivable sur D, et pour $t > 0$,

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \left(\operatorname{Arctan} t \times \frac{1}{e^{\pi t} - 1}\right)' = \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{e^{\pi t} - 1} + \operatorname{Arctan} t \frac{-\pi e^{\pi t}}{(e^{\pi t} - 1)^2} \\ &= \frac{e^{\pi t}}{(e^{\pi t} - 1)^2}\left(\frac{e^{-\pi t}(e^{\pi t} - 1)}{1+t^2} - \pi \operatorname{Arctan} t\right) = \frac{e^{\pi t}}{(e^{\pi t} - 1)^2}\psi(t).\end{aligned}$$

Sur D, φ' est du signe de ψ. Or, ψ est dérivable sur $[0, +\infty[$, et pour $t \geqslant 0$,

$$\psi'(t) = \frac{\pi e^{-\pi t}}{1+t^2} + \frac{(1 - e^{-\pi t})(-2t)}{(1+t^2)^2} - \frac{\pi}{1+t^2} = (1 - e^{-\pi t})\left(-\frac{\pi}{1+t^2} - \frac{2t}{(1+t^2)^2}\right) < 0$$

ψ est ainsi strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, et puisque $\psi(0) = 0$, Ψ est strictement négative sur D. Il en est de même de φ'. Donc

$$\boxed{\varphi \text{ est donc strictement décroissante sur D.}}$$

On en déduit encore que

$$\boxed{\operatorname{Sup}\{\varphi(t),\ t \in D\} = \varphi(0^+) = \frac{1}{\pi}.}$$

Existence et expressions de l'intégrale I :

3. φ est continue sur D et donc localement intégrable sur D, prolongeable par continuité en 0 d'après 1., et négligeable en$+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées ($\varphi(t) \sim \dfrac{\pi}{2e^{\pi t}} = o(\dfrac{1}{t^2})$). φ est donc intégrable sur D et I existe.

4. Pour $t > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, posons $f_k(t) = e^{-k\pi t} \operatorname{Arctan} t$. Pour $t > 0$, puisque $0 < e^{-k\pi t} < 1$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{\operatorname{Arctan} t}{e^{\pi t} - 1} = e^{-\pi t} \operatorname{Arctan} t \frac{1}{1 - e^{-\pi t}} = e^{-\pi t} \operatorname{Arctan} t \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi t} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(k+1)\pi t} \operatorname{Arctan} t \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k\pi t} \operatorname{Arctan} t = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)\end{aligned}$$

Ainsi,

- chaque fonction f_k, $k \in \mathbb{N}^*$, est continue sur D, clairement intégrable sur D (pour les mêmes raisons que φ),
- la série de fonctions de terme général f_k, $k \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers φ sur D et φ est continue sur D.
- puisque les fonctions f_k sont positives, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k\right| = \sum_{k=1}^{n} f_k \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} f_k = \varphi,$$

φ étant intégrable sur D d'après 3.

D'après le théorème de convergence dominée, la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_k(t)\,dt$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-k\pi t} \operatorname{Arctan} t\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k\pi t} \operatorname{Arctan} t\right)\,dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt = I.$$

Soient alors $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in]0, +\infty[$. Les deux fonctions $t \mapsto \dfrac{e^{-k\pi t}}{-k\pi}$ et $t \mapsto \operatorname{Arctan} t$ sont de classe C^1 sur $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\int_0^{A} e^{-k\pi t} \operatorname{Arctan} t\,dt = \left[\frac{e^{-k\pi t}}{-k\pi} \operatorname{Arctan} t\right]_0^{A} + \frac{1}{k\pi}\int_0^{A} \frac{e^{-k\pi t}}{1+t^2}\,dt = -\frac{1}{k\pi} e^{-k\pi A} \operatorname{Arctan} A + \frac{1}{k\pi}\int_0^{A} \frac{e^{-k\pi t}}{1+t^2}\,dt.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-k\pi t}}{1+t^2}$ étant intégrable sur D, quand A tend vers $+\infty$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-k\pi t} \operatorname{Arctan} t\,dt = \frac{1}{k\pi}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-k\pi t}}{1+t^2}\,dt,$$

et donc

$$\boxed{I = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-k\pi t} \operatorname{Arctan} t\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-k\pi t}}{1+t^2}\,dt.}$$

Deuxième partie

Propriétés de la fonction f :

5. Notons F la fonction $F : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[\times[0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \end{array}$. F est définie et continue sur $[0, +\infty[^2$. De plus, pour $(x, t) \in [0, +\infty[^2$,

$$|F(x, t)| = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi_0(t).$$

La fonction φ_0 est définie, continue et clairement intégrable sur $[0, +\infty[$. D'après le théorème de continuité des intégrables à paramètres, on peut affirmer que

$$\boxed{f \text{ est définie et continue sur } [0, +\infty[.}$$

Pour $x > 0$, on a

$$0 \leqslant F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt} = \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

Comme $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.}$$

6. Soit a un réel strictement positif fixé. F admet sur $[a,+\infty[\times[0,+\infty[$ des dérivées partielles première et seconde par rapport à sa première variable x et, pour $(x,t)\in[a,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{-te^{-xt}}{1+t^2}\right| = \frac{te^{-xt}}{1+t^2} \leqslant e^{-at}\frac{t}{1+t^2} = \varphi_1(t),$$

et

$$\left|\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}(x,t)\right| = \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant e^{-at} = \varphi_2(t).$$

Ainsi,

- $\forall x\in[a,+\infty[$, les fonctions $t\mapsto F(x,t)$, $t\mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ et $t\mapsto \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $[0,+\infty[$,
- $\forall t\in[0,+\infty[$, les fonctions $x\mapsto F(x,t)$, $x\mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ et $x\mapsto \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $[a,+\infty[$,
- il existe deux fonctions φ_1 et φ_2, continues et clairement intégrables sur $[0,+\infty[$ telles que $\forall(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_1(t)$ et $\left|\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \varphi_2(t)$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, f est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$, et ceci pour tout réel a strictement positif. f est donc de classe C^2 sur $]0,+\infty[$. De plus, les dérivées premières et secondes de f s'obtiennent en dérivant sour le signe somme. Ainsi, pour $x>0$,

$$f(x)+f''(x) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt + \int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}.$$

$$\boxed{\forall x>0,\ f(x)+f''(x)=\frac{1}{x}.}$$

Deux intégrales :

7. Pour $X\geqslant a$, une intégration par parties permet d'écrire

$$\begin{aligned} C(X)+iS(X) &= \int_a^X \frac{\cos t + i\sin t}{t}\,dt = \int_a^X \frac{e^{it}}{t}\,dt \\ &= \left[\frac{e^{it}}{it}\right]_a^X + \frac{1}{i}\int_a^X \frac{e^{it}}{t^2}\,dt = \frac{e^{iX}}{iX} - \frac{e^{ia}}{ia} + \frac{1}{i}\int_a^X \frac{e^{it}}{t^2}\,dt \end{aligned}$$

Ensuite, puisque $\left|\dfrac{e^{iX}}{iX}\right| = \dfrac{1}{X}$, $\dfrac{e^{iX}}{iX}$ tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$, et puisque $\left|\dfrac{e^{it}}{t^2}\right| = \dfrac{1}{t^2}$, la fonction $t\mapsto\dfrac{e^{it}}{t^2}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ de sorte que la fonction $X\mapsto\displaystyle\int_a^X \frac{e^{it}}{t^2}\,dt$ a une limite dans $\mathbb{C}$ quand X tend vers $+\infty$. On en déduit que la fonction $C+iS$ a une limite dans $\mathbb{C}$ quand X tend vers $+\infty$ et donc que les parties réelle et imaginaire de cette fonction, à savoir C et S ont une limite réelle quand X tend vers $+\infty$.

Une expression de la fonction f :

8. D'après 6., f est solution sur D de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y''+y=\frac{1}{x}\quad (E).$$

Puisque la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est continue sur D, on sait que la solution générale de (E) sur D est somme d'une solution particulière de (E) sur D et de la solution générale sur D de l'équation homogène associée.

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda\cos x+\mu\sin x$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. La méthode de variations des constantes permet alors d'affirmer qu'il existe deux fonctions $x\mapsto\lambda(x)$ et $x\mapsto\mu(x)$, deux fois dérivables sur D, telles que la fonction $x\mapsto\lambda(x)\cos x+\mu(x)\sin x$ soit solution de (E) sur D et que de plus, λ et μ sont obtenues par la résolution du système :

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda'(x)\cos x+\mu'(x)\sin x=0\\ \lambda'(x)(-\sin x)+\mu'(x)\cos x=\dfrac{1}{x}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda'(x)=\dfrac{1}{1}\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ \dfrac{1}{x} & \cos x\end{vmatrix}\\ \mu'(x)=\dfrac{1}{1}\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda'(x)=-\dfrac{\sin x}{x}\\ \mu'(x)=\dfrac{\cos x}{x}\end{array}\right. .$$

Maintenant, en écrivant que pour $x>0$, $g(x)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt-\int_1^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt$, il est clair que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour $x>0$, $g'(x)=-\frac{\sin x}{x}$. De même, h est dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour $x>0$, $h'(x)=-\frac{\cos x}{x}$. On peut donc prendre $\lambda=g$ et $\mu=-h$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } D \text{ sont donc les fonctions de la forme}\\ x\mapsto \lambda\cos x+\mu\sin x+\cos x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.\end{array}}$$

9. f est l'une des fonctions ci-dessus et de plus, d'après 5., f tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
Or, $\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt=\int_a^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt-\int_a^{x}\frac{\cos t}{t}\,dt=\lim_{+\infty}C-C(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. De même, $\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty}\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt=0.$$

D'autre part, $\lambda\cos x+\mu\sin x=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\cos(x-x_0)$ a une limite réelle en $+\infty$ si et seulement si $\lambda=\mu=0$. L'équation (E) admet donc une et une seule solution de limite nulle en $+\infty$ à savoir la fonction $x\mapsto\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt$. Cette fonction est nécessairement la fonction f.

Ainsi, pour $x>0$,

$$\begin{aligned}f(x)&=\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt=\int_x^{+\infty}\frac{\sin t\cos x-\cos t\sin x}{t}\,dt=\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{t}\,dt\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+x}\,du,\end{aligned}$$

en posant $u=t-x$. Ensuite, en posant $u=xt$, on obtient pour $x>0$,

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+x}\,du=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{xt+x}\,xdt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{1+t}\,dt.$$

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+x}\,du=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{1+t}\,dt.}$$

Troisième partie

Un résultat intermédiaire :

10. D'après 4. et 9.,

$$I=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-k\pi t}}{1+t^2}\,dt=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k\pi}f(k\pi)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(k\pi t)}{1+t}\,dt.$$

En posant $u=\pi t$ dans chacune des intégrales ci-dessus, on obtient alors

$$\boxed{I=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ku)}{\pi+u}\,du.}$$

11. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Soient ε et A, deux réels strictement positifs. Une intégration parties fournit

$$\int_\varepsilon^A\frac{\sin(ku)}{\pi+u}\,du=-\frac{1}{k}\frac{\cos(kA)}{\pi+A}+\frac{1}{k}\frac{\cos(k\varepsilon)}{\pi+\varepsilon}-\frac{1}{k}\int_\varepsilon^A\frac{\cos(ku)}{(\pi+u)^2}\,du$$

Quand ε tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ku)}{\pi+u} = \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ku)}{(\pi+u)^2}\,du.$$

Mais alors

$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(k\pi t)}{1+t}\,dt. = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi}\left(\frac{1}{k\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ku)}{(\pi+u)^2}\,du\right) = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ku)}{(\pi+u)^2}\,du.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in [0,+\infty[$, posons $t_k(u) = \dfrac{\cos(ku)}{k^2(\pi+u)^2}$ et pour $u \in [0,+\infty[$, posons $t(u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} t_k(u)$.

- Chaque fonction g_k est continue sur $[0,+\infty[$ et intégrable sur $[0,+\infty[$ car est dominée par $\dfrac{1}{u^2}$ quand u tend vers $+\infty$.
- Pour chaque $u \in [0,+\infty[$ et chaque $k \in \mathbb{N}^*$, $|t_k(u)| \leqslant \dfrac{1}{k^2}$. On en déduit que la série de fonctions de terme général t_k converge normalement sur $[0,+\infty[$. Puisque chaque t_k est continue sur $[0,+\infty[$, la fonction t est définie et continue sur $[0,+\infty[$ et la série de fonction de terme général t_k converge simplement vers t sur $[0,+\infty[$.
-

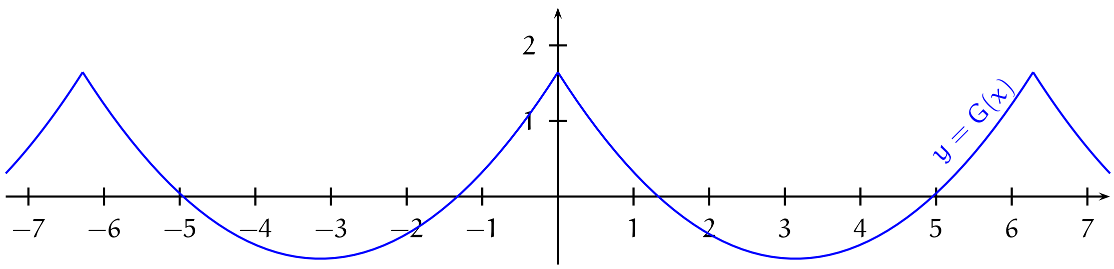
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |t_k(u)|\,du \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{k^2}\frac{1}{(\pi+u)^2}\,du = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty.$$

D'après un théorème d'intégration terme à terme, la fonction t est intégrable sur $[0,+\infty[$, la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} t_k(u)\,du$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t(u)\,du = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} t_k(u)\,du$. En tenant compte de la question 10., on a montré que

$$\boxed{I = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\pi+u)^2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nu)}{n^2}\right)\,du.}$$

Somme de la série de terme général $\cos(nu)/n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$:

12. Graphe de la fonction G. Pour $x \in [0,2\pi]$, $G(x) = \dfrac{(x-\pi)^2}{4} - \dfrac{\pi^2}{12}$.



Vérifions que la fonction G est paire. Soit $x \in [0,2\pi]$.

$$G(-x) = G(-x+2\pi) = \frac{(-x+2\pi-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = G(x).$$

Soit alors $x \in \mathbb{R}$. $x - 2\pi E\left(\dfrac{x}{2\pi}\right) \in [0,2\pi[$ et

$$G(-x) = G\left(-\left(x - 2\pi E(\frac{x}{2\pi})\right)\right) = G\left(x - 2\pi E(\frac{x}{2\pi})\right) = G(x).$$

Finalement

$$\boxed{\text{la fonction } G \text{ est paire.}}$$

La fonction G est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier. G est paire et donc les coefficients $b_n(G)$ sont nuls. Ensuite,

$$a_0(G) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}\right)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi^3}{12}\right) = 0.$$

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, deux intégrations par parties fournissent

$$\begin{aligned}
a_n(G) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{(x-\pi)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}\right)\cos(nx)\,dx\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\left(\frac{(x-\pi)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}\right)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\frac{x-\pi}{2}\sin(nx)\,dx\right)=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)(-\sin(nx))\,dx\\
&= \frac{1}{n\pi}\left(\left[(x-\pi)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx\right)=\frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

La fonction G est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de G converge simplement vers G sur $\mathbb{R}$. Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

De plus, puisque G est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, on sait que la série précédente converge normalement sur $\mathbb{R}$.

13. D'après la question précédente,

$$\boxed{\forall x \in [0,2\pi],\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}.}$$

En particulier, pour $x=0$, on obtient

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.}$$

Valeur de l'intégrale I :

14. Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisque G est 2π-périodique, le changement de variables $u=t+2k\pi$ fournit

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\frac{1}{(u+\pi)^2}G(u)\,du=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(t+2k\pi+\pi)^2}\left(\frac{t^2}{4}-\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi^2}{6}\right)\,dt\\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1}{(t+(2k+1)\pi)^2}\left(\frac{1}{4}(t+(2k+1)\pi)^2-(k+1)\pi(t+(2k+1)\pi)+\frac{(2k+1)(2k+3)\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{6}\right)\,dt\\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}-\frac{(k+1)\pi}{t+(2k+1)\pi}+\left(\frac{(2k+1)(2k+3)\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{6}\right)\frac{1}{(t+(2k+1)\pi))^2}\right)\,dt\\
&= \frac{\pi}{2}-(k+1)\pi\left[\ln(t+(2k+1)\pi)\right]_0^{2\pi}+\left(\frac{(2k+1)(2k+3)\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{6}\right)\left[-\frac{1}{t+(2k+1)\pi}\right]_0^{2\pi}\\
&= \frac{\pi}{2}-(k+1)\pi\ln\left(\frac{2k+3}{2k+1}\right)+\left(\frac{(2k+1)(2k+3)\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{6}\right)\left(-\frac{1}{(2k+3)\pi}+\frac{1}{(2k+1)\pi}\right)\\
&= \pi-(k+1)\pi\ln\left(\frac{2k+3}{2k+1}\right)+\frac{\pi}{6}\left(-\frac{1}{2k+3}+\frac{1}{2k+1}\right).
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ a_k=\pi-(k+1)\pi\ln\left(\frac{2k+3}{2k+1}\right)+\frac{\pi}{6}\left(-\frac{1}{2k+3}+\frac{1}{2k+1}\right).}$$

15. Mais alors

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(u+\pi)^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nu)}{n^2}\,du&=-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}a_k=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N-1}\left(-1+(n+1)\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+1}\right)\right)\\&=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N-1}\left(-1+(n+1)\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)\right)-\frac{1}{6}\lim_{N\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2N+1}\right)\\&=-\frac{1}{6}+\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N-1}\left(-1+(n+1)\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)\right),\end{aligned}$$

et finalement, d'après les questions 11. et 13.,

$$I=\frac{1}{\pi^2}\times\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{6}+\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N-1}\left(-1+(n+1)\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)\right)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N-1}\left(-1+(n+1)\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)\right).$$

$$\boxed{I=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N-1}\left(-1+(n+1)\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)\right).}$$

16. Soit $N\in\mathbb{N}^*$.

$$E_N=e^{-N}\prod_{n=0}^{N-1}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}=\frac{e^{-N}(2N+1)^N}{1\times3\times\ldots\times(2N-1)}=\frac{e^{-N}(2N+1)^N2^NN!}{(2N)!}.$$

Quand N tend vers $+\infty$, la formule de Stirling fournit

$$\begin{aligned}E_N&=\frac{e^{-N}(2N)^N\left(1+\dfrac{1}{2N}\right)^N2^NN!}{(2N)!}\\&\sim\frac{e^{-N}2^NN^Ne^{1/2}2^NN^Ne^{-N}\sqrt{2\pi N}}{(2N)^{2N}e^{-2N}\sqrt{2\pi(2N)}}=\sqrt{\frac{e}{2}}\end{aligned}$$

Enfin, $I=\lim\limits_{N\to+\infty}\ln(E_N)=\dfrac{1-\ln 2}{2}$.

$$\boxed{I=\frac{1-\ln 2}{2}.}$$

Calcul de l'intégrale K :

17. Pour $t\in]0,+\infty[$, $\dfrac{1}{e^{2\pi t}-1}=\dfrac{1}{(e^{\pi t}-1)(e^{\pi t}+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{e^{\pi t}-1}-\dfrac{1}{e^{\pi t}+1}\right)$ et donc $J=\dfrac{1}{2}(I-K)$ ou encore

$$K=I-2J=\frac{1-\ln 2}{2}-\left(1-\frac{\ln(2\pi)}{2}\right)=\frac{\ln(\pi)-1}{2}.$$

$$\boxed{K=\frac{\ln(\pi)-1}{2}.}$$

