A 2008 MATH. II PSI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS,
DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE,
DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2008

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSTIM, TELECOM SudParis (ex TELECOM INT), TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans ce qui suit, on dira qu'une fonction de plusieurs variables est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si elle admet des dérivées partielles de tous ordres et si toutes ces dérivées partielles sont continues.

Définition 1. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une suite de réels positifs indexée par $\mathbf{Z}$. La série de terme général $(a_n,\, n\in\mathbf{Z})$ est convergente lorsque les séries*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$$

sont convergentes. On a alors

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}.$$

Définition 2. *Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}$ une suite double (indexée par $\mathbf{Z}^2$) de nombres complexes telle que la série*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbf{Z}} |a_{m,n}|\Big) \text{ [respectivement } \sum_{m\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_{m,n}|\Big)]$$

converge. On admet alors que la série

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_{m,n}|\Big) \text{ [respectivement } \sum_{n\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbf{Z}} |a_{m,n}|\Big)]$$

converge également. On dira alors que la série double $\sum_{m,n\in\mathbf{Z}} a_{m,n}$ est sommable. En outre, on a :

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbf{Z}} a_{m,n}\Big) = \sum_{m\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_{m,n}\Big).$$

La valeur commune de ces deux nombres complexes sera notée $\sum_{m,n\in\mathbf{Z}} a_{m,n}$ et appelée somme de la série double $\sum_{m,n\in\mathbf{Z}} a_{m,n}$.

Pour u fonction bornée de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{C}$, on note

$$\|u\|_\infty = \sup_{x,\,y} |u(x,\,y)|.$$

Soit $(u_n(x,\,y),\, n\in\mathbf{Z})$ une suite de fonctions bornées de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{C}$.

Définition 3. *La série de terme général $(u_n(x,\,y),\, n\in\mathbf{Z})$ est dite normalement convergente sur $\mathbf{R}^2$ lorsque la série de terme général $(\|u_n\|_\infty,\, n\in\mathbf{Z})$ est convergente.*

On admet le théorème suivant :

Théorème 1. *Si*

a) pour tout entier relatif n*,* u_n *est continue sur* $\mathbf{R}^2$*,*

b) et la série de terme général $(u_n(x,\,y),\, n \in \mathbf{Z})$ *est normalement convergente*

alors la fonction u *définie par*

$$u(x,\,y) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n(x,\,y)$$

est continue sur $\mathbf{R}^2$.

I Série de Fourier à deux variables

Dans les questions 1 à 9, u est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$, à valeurs complexes et doublement $2\pi-$périodique, c'est-à-dire que pour tous les entiers relatifs k, l et tout couple de réels $(x,\,y)$, on a :

$$u(x,\,y) = u(x + 2k\pi,\, y + 2l\pi).$$

On pose pour chaque couple d'entiers relatifs $(m,\,n)$:

$$a_{m,n}(u) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,\,y)e^{-imx}\,e^{-iny}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Pour tout entier relatif m, on introduit la fonction u_m définie pour tout réel y, par

$$u_m(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,\,y)e^{-imx}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer, pour tout entier relatif m, que u_m est 2π-périodique, continue sur $\mathbf{R}$ et que l'on a la relation suivante :

$$\int_0^{2\pi} |u_m(y)|^2\,\mathrm{d}y = 2\pi\sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_{m,n}(u)|^2.$$

2. Pour tout réel y, établir l'identité

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}} |u_m(y)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(x,\,y)|^2\,\mathrm{d}x.$$

3. Prouver que la série double

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_{m,n}(u)|^2$$

converge et établir l'identité

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_{m,n}(u)|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(x,\,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

On suppose maintenant, que pour tous les entiers positifs k et l, la suite double

$$\Big(|a_{m,n}(u)|\,(1+|m|)^k(1+|n|)^l\Big)_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}$$

est bornée.

4. Prouver que pour tout couple de réels $(x,\,y)$, la série double suivante est sommable :

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_{m,n}(u)\,e^{imx+iny}.$$

On pose alors

$$v(x,\,y) = \sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_{m,n}(u)\,e^{imx+iny}.$$

5. Prouver que v ainsi définie est continue.

6. Démontrer que v est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$ et que pour tout couple $(k,\,l)$ d'entiers naturels :

$$\frac{\partial^{k+l}v}{\partial x^k\partial y^l}(x,\,y) = \sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}(im)^k(in)^l a_{m,n}(u)\,e^{imx+iny}.$$

7. Soit un réel y. Montrer que pour tout entier relatif k,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x,\,y)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_{k,n}(u)e^{iny}.$$

8. Pour tout couple $(k,\,l)$ d'entiers relatifs, calculer $a_{k,\,l}(v)$.

9. En déduire que $u = v$.

II Application

Soit $u_0(x, y)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$ à valeurs complexes et doublement $2\pi-$périodique. On cherche à déterminer l'existence et l'unicité d'une fonction $u(t,\, x,\, y)$

a) continue sur $[0, +\infty[\times\mathbf{R}^2$,

b) doublement $2\pi-$périodique en $(x,\, y)$,

c) de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^2$

d) et dont toutes les dérivées partielles en $(t,\, x,\, y)$ admettent un prolongement continu à $[0, +\infty[\times\mathbf{R}^2$,

e) qui soit solution du problème suivant :

$$\forall\,(x,\, y) \in \mathbf{R}^2,\;\; u(0,\, x,\, y) = u_0(x,\, y),\; \text{ et} \tag{3}$$

$$\forall\,(t,\, x,\, y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^2,\;\; \frac{\partial u}{\partial t}(t,\, x,\, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\, x,\, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,\, x,\, y) = 0. \tag{4}$$

10. Pour tout couple d'entiers relatifs $(m,\, n)$, exprimer $a_{m,n}(\dfrac{\partial u_0}{\partial x})$ en fonction de $a_{m,n}(u_0)$.

11. Démontrer, pour tous les entiers naturels k et l, que la suite double

$$\Big(|a_{m,n}(u_0)|\,(1+|m|)^k(1+|n|)^l\Big)_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}$$

est bornée.

12. Construire une fonction u qui soit solution du problème posé.
Indication : on pourra chercher u sous la forme

$$u(t,\, x,\, y) = \sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} \varphi_{m,\,n}(t)\alpha_{m,\,n}e^{imx+iny}.$$

Soit $u(t,\, x,\, y)$ une solution du problème précédent. Pour t réel positif, on pose

$$E_u(t) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(t,\, x,\, y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_0^t \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial u}{\partial x}(s,\, x,\, y)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}(s,\, x,\, y)\right|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}s.$$

13. Montrer que la fonction E_u est continue sur $\mathbf{R}^+$ et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$. Exprimer sa dérivée sous forme d'une intégrale sur $[0,\, 2\pi]^2$.

14. Pour tout $(t,\, x,\, y)$ appartenant à $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^2$, établir l'identité suivante :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{u}{2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\right)(t,\, x,\, y)\\ &\qquad = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)(t,\, x,\, y).\end{aligned}$$

15. Prouver que $E_u(t) = E_u(0)$ pour tout $t \geqslant 0$.

16. Montrer que le problème posé possède au plus une solution.

Fin du problème