Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME EPREUVE. FILIERE MP

A. Questiions préliminaires

1) • Cas $n = 2$. $\mathscr{U}_2$ ne contient qu'un élément : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $u_2 = 1$.

• Cas $n = 3$. On trouve six éléments dans $\mathscr{U}_3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{u_2 = 1 \text{ et } u_3 = 6}$$

2) Soient $n \geqslant 2$ puis $A \in \mathscr{U}_n$. La somme de coefficients d'une ligne de A vaut 2 et donc $AX_0 = 2X_0$. Puisque $X_0 \neq 0$,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \forall A \in \mathscr{U}_n,\ X_0 \text{ est vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre 2.}}$$

3) Soient $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \setminus \{(1, 1)\}$ puis $\mathscr{H}_{n,(i,j)}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{U}_n$ qui possède un 1 en position (i, j).

Notons φ l'application qui à une matrice M associe la matrice déduite de M en échangeant les lignes 1 et i puis les colonnes 1 et j. Chacune de ces deux transformations ne modifie pas le nombre de 1 dans chaque ligne et dans chaque colonne. Donc, pour chaque $M \in \mathscr{H}_{n,(i,j)}$, la matrice $\varphi(M)$ est un élément de $\mathscr{U}_n$ qui possède un 1 en position $(1, 1)$ c'est-à-dire un élément de $\mathscr{H}_n$.
Comme $\varphi \circ \varphi = Id_{\mathscr{U}_n}$, φ est une bijection telle que $\varphi\left(\mathscr{H}_{n,(i,j)}\right) \subset \mathscr{H}_n$. Mais on a aussi $\varphi\left(\mathscr{H}_n\right) \subset \mathscr{H}_{n,(i,j)}$ et donc $\mathscr{H} = \varphi \circ \varphi\left(\mathscr{H}_n\right) \subset \mathscr{H}_{n,(i,j)}$.
Ainsi, φ est une permutation de $\mathscr{U}_n$ telle que $\varphi\left(\mathscr{H}_{n,(i,j)}\right) = \mathscr{H}_n$. On en déduit que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \setminus \{(1, 1)\}$, $\text{card}\left(\mathscr{H}_{n,(i,j)}\right) = \text{card}\left(\mathscr{H}_n\right) = h_n$. Par suite, quand on additionne toutes les matrices de $\mathscr{U}_n$, à chaque position, on additionne des 1 en nombre égal à h_n et finalement

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \sum_{A \in \mathscr{U}_n} A = h_n J.}$$

B. Étude du cardinal de $\mathscr{U}_n$

4) Soit $n \geqslant 2$. On a d'une part

$$\left(\sum_{A \in \mathscr{U}_n} A\right) X_0 = h_n J X_0 = n h_n X_0$$

et d'autre part

$$\left(\sum_{A \in \mathscr{U}_n} A\right) X_0 = \sum_{A \in \mathscr{U}_n} A X_0 = \sum_{A \in \mathscr{U}_n} 2X_0 = 2u_n X_0.$$

Puisque $X_0 \neq 0$, on obtient $n h_n = 2u_n$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ u_n = \frac{n}{2} h_n.}$$

5) Pour $(i, j) \in [\![2, n]\!]^2$, notons $\mathscr{H}_n^{i,j}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{H}_n$ qui ont un 1 en position $(i, 1)$ et un 1 en position $(1, j)$. Les $\mathscr{H}_n^{i,j}$, $(i, j) \in [\![2, n]\!]^2$, constituent une partition de $\mathscr{H}_n$ et il y a $(n-1)^2$ $\mathscr{H}_n^{i,j}$, $(i, j) \in [\![2, n]\!]^2$.

De plus, l'application qui à une matrice A de $\mathscr{H}_n^{i,j}$ associe la matrice A' déduite de A en échangeant ses lignes 2 et i et ses colonnes 2 et j est une bijection de $\mathscr{H}_n^{i,j}$ sur $\mathscr{H}_n^{2,2} = \mathscr{K}_n$. On en déduit que

$$h_n = \text{card}(\mathscr{H}_n) = \sum_{(i,j)\in[\![2,n]\!]^2} \text{card}(\mathscr{H}_n^{i,j}) = \sum_{(i,j)\in[\![2,n]\!]^2} \text{card}(\mathscr{K}_n) = (n-1)^2 k_n.$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ h_n = (n-1)^2 k_n.}$$

6) Soit $n \geqslant 4$. Il y a deux types de matrices dans $\mathscr{K}_n$ et chaque matrice de $\mathscr{K}_n$ est d'un seul de ces deux types :

- celles qui possèdent un 1 en position $(2,2)$. De telles matrices possèdent un 0 en position (i,j) telle que $1 \leqslant i \leqslant 2$ et $j \geqslant 3$ ou $1 \leqslant j \leqslant 2$ et $i \geqslant 3$ et donc possède exactement deux 1 dans chaque ligne i et chaque colonne j telles que $3 \leqslant i,j \leqslant n$. Il y a u_{n-2} telles matrices.
- celles qui possèdent un 0 en position $(2,2)$. De telles matrices A possèdent un 0 en position (i,j) telle que $i = 1$ et $j \geqslant 3$ ou $j = 1$ et $i \geqslant 3$. Pour une matrice A de ce type, notons A' la matrice extraite de A et constituée de ses $n-1$ dernières lignes et colonnes. Il y a autant de matrices A' que de matrices A. Notons ensuite A'' la matrice obtenue en remplaçant dans la matrice A' le 0 en position $(1,1)$ par un 1. Les matrices A'' sont les matrices de format $n-1$ ayant exactement deux 1 dans chaque ligne et chaque colonne. Il y en a h_{n-1}.

Au total, $k_n = u_{n-2} + h_{n-1}$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 4,\ k_n = u_{n-2} + h_{n-1}.}$$

7) Soit $n \geqslant 4$. D'après les questions 4) et 5), $k_n = \dfrac{h_n}{(n-1)^2} = \dfrac{2u_n}{n(n-1)^2}$. Mais alors

$$k_n = u_{n-2} + h_{n-1} \Rightarrow \frac{2u_n}{n(n-1)^2} = u_{n-2} + \frac{2u_{n-1}}{n-1} \Rightarrow u_n = \frac{n(n-1)^2}{2}u_{n-2} + n(n-1)u_{n-1}.$$

Puisque $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et $u_3 = 6$, cette égalité reste vraie quand $n = 2$ et $n = 3$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ u_n = n(n-1)u_{n-1} + \frac{n(n-1)^2}{2}u_{n-2}.}$$

Pour $n \geqslant 2$, on a ensuite

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{u_n}{(n!)^2} = \frac{n(n-1)u_{n-1} + \dfrac{n(n-1)^2}{2}u_{n-2}}{(n!)^2} = \frac{n-1}{n}\frac{u_{n-1}}{(n-1)!^2} + \frac{1}{2n}\frac{u_{n-2}}{(n-2)!^2} \\ &= \frac{n-1}{n}w_{n-1} + \frac{1}{2n}w_{n-2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{w_0 = 1,\ w_1 = 0 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ w_n = \frac{n-1}{n}w_{n-1} + \frac{1}{2n}w_{n-2}.}$$

8) Pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$ et donc $w_n \geqslant 0$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \leqslant 1$.

- $w_0 = 1 \leqslant 1$ et $w_1 = 0 \leqslant 1$.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $w_{n-2} \leqslant 1$ et $w_{n-1} \leqslant 1$. Alors,

$$w_n = \frac{n-1}{n}w_{n-1} + \frac{1}{2n}w_{n-2} \leqslant \frac{n-1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{2n-1}{2n} \leqslant 1.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \in [0,1].}$$

Plus précisément, il est clair par récurrence que $\forall n \geqslant 2$, $w_n > 0$. Or pour $n \geqslant 2$, on a $w_n = \dfrac{n-1}{n}w_{n-1} + \dfrac{1}{2n}w_{n-2} \geqslant \dfrac{n-1}{n}w_{n-1}$ et donc pour $n \geqslant 3$,

$$w_n = w_2 \prod_{k=3}^{n} \frac{w_k}{w_{k-1}} \geqslant \frac{1}{2}\prod_{k=3}^{n}\frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $\forall n \geqslant 3$, $w_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ et donc la série de terme général w_n diverge.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $|w_n| \leqslant 1$, on en déduit que $R_w \geqslant 1$ et puisque $\sum w_n$ diverge, on en déduit que $R_w \leqslant 1$. Finalement

$$\boxed{R_w = 1.}$$

9) On sait que la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et que les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Soit $x \in]-1, 1[$. Pour $n \geqslant 2$, on a $w_n = \dfrac{n-1}{n} w_{n-1} + \dfrac{1}{2n} w_{n-2}$ et donc $2nw_n = 2(n-1)w_{n-1} + w_{n-2}$. On multiplie les deux membres de ces égalités par x^{n-1} puis on somme pour n variant de 2 à $+\infty$. On obtient

$$2\sum_{n=2}^{+\infty} nw_n x^{n-1} = 2x\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)w_{n-1}x^{n-2} + x\sum_{n=2}^{+\infty} w_{n-2}x^{n-2}.$$

Ceci fournit $2(W'(x) - w_1) = 2xW'(x) + xW(x)$ et donc $2(1-x)W'(x) = xW(x)$ (car $w_1 = u_1 = 0$).

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ W'(x) - \dfrac{x}{2(1-x)}W(x) = 0.}$$

Puisque $-\dfrac{x}{2(1-x)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(1-x)}$, on a $\displaystyle\int_0^x -\frac{t}{2(1-t)}\ dt = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(1-x)$. On en déduit que pour $x \in]-1, 1[$,

$$W(x) = w_0 \exp\left(\int_0^x \left(\frac{t}{2(1-t)}\right)\ dt\right) = \exp\left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1-x)\right) = \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{1-x}}.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ W(x) = \dfrac{e^{-x/2}}{\sqrt{1-x}}.}$$

C. Équivalent d'une suite de coefficients d'un développement en série entière

10) On sait que les fonctions $x \mapsto e^{\alpha x}$ et $x \mapsto (1-x)^{-\beta}$ sont développables en série entière sur $]-1, 1[$. On en déduit que ϕ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ en tant que produit de fonctions développables en série entière sur $]-1, 1[$.

11) On sait que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\dfrac{1}{(1-x)^\beta} = (1-x)^{-\beta} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-\beta)(-\beta-1\ldots(-\beta-(n-1))}{n!} \times (-1)^n = \frac{(\beta+n-1)\ldots(\beta+1)\beta}{n!} \\ &= \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta+k-1)} = \frac{\Gamma(n+\beta)}{n!\Gamma(\beta)}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ \dfrac{1}{(1-x)^\beta} = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\Gamma(n+\beta)}{n!}x^n.}$$

12) Soit $x \in]-1, 1[$. A l'aide d'un produit de Cauchy, on obtient

$$\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(n+\beta)}{n!}x^n\right) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!}\frac{\Gamma(k+\beta)}{k!}\right)x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on en déduit que pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} \phi_n &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!}\frac{\Gamma(k+\beta)}{k!}\right) = \frac{1}{n!\Gamma(\beta)}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\alpha^{n-k}\int_0^{+\infty} x^{k+\beta-1}e^{-x}\ dx\right) \\ &= \frac{1}{n!\Gamma(\beta)}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\alpha^{n-k}x^k\right)x^{\beta-1}e^{-x}\ dx \text{ (somme d'intégrales convergentes)} \\ &= \frac{1}{n!\Gamma(\beta)}\int_0^{+\infty}(x+\alpha)^n x^{\beta-1}e^{-x}\ dx = \frac{\psi_n}{n!\Gamma(\beta)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \phi_n = \frac{\psi_n}{n!\Gamma(\beta)} \text{ où } \psi_n = \int_0^{+\infty} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\ du.}$$

13) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n\ :\ u \mapsto e^{-u}(\alpha+u)^n$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ de dérivée la fonction $u \mapsto n(\alpha+u)^{n-1}e^{-u} - (\alpha+u)^n e^{-u} = (n-\alpha-u)(\alpha+u)^{n-1}e^{-u}$. La fonction f_n est donc croissante sur $[-\alpha, n-\alpha]$ et décroissante sur $[n-\alpha,+\infty[$.
Pour $n \geqslant a+|\alpha| > 0$, on a $|\alpha| < a \leqslant n-|\alpha| \leqslant n-\alpha$ et donc la fonction $u \mapsto e^{-u}(|\alpha|+u)^n$ est croissante sur $[-|\alpha|, a]$ et en particulier sur $[0,a]$. Par suite,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^a u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\ du\right| &\leqslant \int_0^a u^{\beta-1}e^{-u}(|\alpha|+u)^n\ du \\ &\leqslant (|\alpha|+a)^n\int_0^a u^{\beta-1}\ du = (|\alpha|+a)^n\frac{a^\beta}{\beta}.\end{aligned}$$

D'autre part, pour $u \in [a,+\infty[$, $u+\alpha \geqslant a+\alpha \geqslant a-|\alpha| > 0$ et donc pour $n \geqslant a+|\alpha|+1$ de sorte que $[n-\alpha-1, n-\alpha] \subset [-\alpha, n-\alpha]$,

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\ du \geqslant \int_{n-\alpha-1}^{n-\alpha} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\ du &\geqslant e^{-(n-\alpha-1)}(\alpha+n-\alpha-1)^n\int_{n-\alpha-1}^{n-\alpha} u^{\beta-1}\ du \\ &= \frac{e^{\alpha-1}}{\beta}(n-1)^n((n-\alpha)^\beta-(n-\alpha-1)^\beta).\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{e^{\alpha-1}}{\beta}(n-1)^n((n-\alpha)^\beta-(n-\alpha-1)^\beta) &= \frac{e^{\alpha-1}}{\beta}n^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n(n-\alpha)^\beta\left(1-\left(1-\frac{1}{n-\alpha}\right)^\beta\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\alpha-1}}{\beta}n^n e^{-1}n^\beta\frac{\beta}{n} = e^{\alpha-2}n^{n+\beta-1}\end{aligned}$$

D'après un théorème de croissances comparées, $(|\alpha|+a)^n\dfrac{a^\beta}{\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^{\alpha-2}n^{n+\beta-1}\right)$ et donc

$$\boxed{\left|\int_0^a u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\ du\right| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\int_a^{+\infty} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\ du\right).}$$

14) Donc pour $a > |\alpha|$, $\psi_n = \displaystyle\int_0^a u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\ du + \int_a^{+\infty} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\ du \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_a^{+\infty} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\ du$.
Posons $I_n = \displaystyle\int_a^{+\infty} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\ du$ et $J_n = \displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\ du$. Pour tout entier naturel n,

$$|I_n - J_n| \leqslant \int_a^{+\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\alpha-1}\left|1-\left(\frac{u}{u+\alpha}\right)^{\beta-1}\right|\ du$$

La fonction homographique $u \mapsto \dfrac{u}{u+\alpha}$ croît de $\dfrac{a}{a+\alpha}$ à 1 si $\alpha \geqslant 0$ et décroît de $\dfrac{a}{a+\alpha}$ à 1 si $\alpha < 0$. Mais alors, pour $u \in [a,+\infty[$ donné, l'égalité des accroissements finis appliquée à la fonction $f\ :\ t \mapsto t^{\beta-1}$ fournit un réel c entre $\dfrac{u}{u+\alpha}$ et 1 et donc entre $\dfrac{a}{a+\alpha}$ et 1 tel que

$$\begin{aligned}\left|1-\left(\frac{u}{u+\alpha}\right)^{\beta-1}\right| = \left|f(1)-f\left(\frac{u}{u+\alpha}\right)\right| &= \left|1-\frac{u}{u+\alpha}\right| \times (\beta-1)c^{\beta-2} = \alpha(\beta-1)c^{\beta-2}\times\frac{1}{\alpha+u} \\ &\leqslant \frac{M}{\alpha+u} \text{ où } M = \max\left\{\left(\frac{a}{a+\alpha}\right)^{\beta-2}, 1\right\}.\end{aligned}$$

et donc $|I_n - J_n| \leqslant M\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-2}\ du$. Une intégration par parties (effectuée sur $[a+\alpha, A]$ puis A tendant $+\infty$) fournit alors

$$|I_n - J_n| \leqslant M\int_a^{+\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-2}\,du = M\left(\left[e^{-u}\frac{(\alpha+u)^{n+\beta-1}}{n+\beta-1}\right]_a^{+\infty} + \frac{1}{n+\beta-1}\int_a^{+\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\right)$$
$$= -Me^{-(a+\alpha)}\frac{(a+\alpha)^{n+\beta-1}}{n+\beta-1} + \frac{MJ_n}{n+\beta-1} \leqslant \frac{MJ_n}{n+\beta-1}.$$

Ainsi, $|I_n - J_n| \underset{n\to+\infty}{=} o(J_n)$ et donc $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} J_n$. On a montré que

$$\boxed{\exists a > |\alpha|/,\ \int_a^{+\infty} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\,du \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_a^{+\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\,du.}$$

15) En posant $v = \alpha + u$, on obtient

$$\int_a^{+\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\,du = \int_{a+\alpha}^{+\infty} e^{-(v-\alpha)}v^{n+\beta-1}\,dv = e^{\alpha}\int_{a+\alpha}^{+\infty} e^{-v}v^{n+\beta-1}\,dv = e^{\alpha}\Gamma(n+\beta) - e^{\alpha}\int_0^{a+\alpha} e^{-v}v^{n+\beta-1}\,dv.$$

Or, pour n grand de sorte que $n+\beta-1>0$

$$\int_0^{a+\alpha} e^{-v}v^{n+\beta-1}\,dv \leqslant (a+\alpha)\times e^0\times(a+\alpha)^{n+\beta-1} = (a+\alpha)^{n+\beta}$$

et d'autre part,

$$\Gamma(n+\beta) = (n+\beta-1)(n+\beta-2)\dots(\beta-E(\beta)+1)\Gamma(\beta-E(\beta)+1) \geqslant (n-1)(n-2)\dots1\Gamma(\beta-E(\beta)+1) = \Gamma(\beta-E(\beta)+1)\times(n-1)!.$$

Comme $\Gamma(\beta - E(\beta) + 1) > 0$ (intégrale d'une fonction continue et strictement positive), un théorème de croissances comparées permet d'affirmer que $(a+\alpha)^{n+\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\Gamma(\beta-E(\beta)+1)\times(n-1)!\right)$ puis que $\displaystyle\int_0^{a+\alpha} e^{-v}v^{n+\beta-1}\,dv \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\Gamma(n+\beta)\right)$ et finalement que $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\,du \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\alpha}\Gamma(n+\beta)$.

En résumé, $\displaystyle\psi_n = \int_0^{+\infty} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\,du \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_a^{+\infty} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\,du \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_a^{+\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\,du \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\alpha}\Gamma(n+\beta)$.

$$\boxed{\psi_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\alpha}\Gamma(n+\beta).}$$

16) $\displaystyle\phi_n = \frac{\psi_n}{n!\Gamma(\beta)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\alpha}\Gamma(n+\beta)}{n!\Gamma(\beta)}$. Pour $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{1}{2} > 0$, on obtient $\displaystyle u_n = w_n(n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{e}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$.

De plus,

$$\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\times3\times\dots\times(2n-1)}{2^n}$$
$$= \frac{1\times2\times3\times\dots\times(2n-1)\times(2n)}{2^n\times2\times4\times\dots\times(2n)} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}.$$

D'après la formule de Stirling, $\displaystyle u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{e}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{(2n)!}{\sqrt{e}\,2^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}\times\frac{1}{\sqrt{e}\,2^{2n}} = 2\left(\frac{n}{e}\right)^{2n+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}$.

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n+\frac{1}{2}}.}$$

D. Étude de rang

17) $\mathscr{U}_2$ est constitué d'une matrice non nulle et donc $r_2 = 1$. On rappelle que $\mathscr{U}_3$ est constitué des six matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et }$$
$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc $r_3 \leqslant 6$. L'ensemble des $J - A$, $A \in \mathscr{U}_3$, est constitué des matrices

$$J - A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ J - A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ J - A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J - A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{et } J - A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

On rappelle alors que $\displaystyle\sum_{A \in \mathscr{U}_3} A = h_3 J = 4J$ et donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) &= \mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, J) = \mathrm{Vect}(-A_1, -A_2, -A_3, -A_4, -A_5, -A_6, J) \\
&= \mathrm{Vect}(J - A_1, J - A_2, J - A_3, J - A_4, J - A_5, J - A_6, J) \\
&= \mathrm{Vect}(J - A_1, J - A_2, J - A_3, J - A_4, J - A_5, J - A_6) \\
&\text{(car } J = \frac{1}{2}(J - A_1 + J - A_2 + \ldots + J - A_6) \in \mathrm{Vect}(J - A_1, \ldots, J - A_6) \\
&= \mathrm{Vect}(J - A_1, J - A_2, J - A_3, J - A_4, J - A_5) \\
&\text{(car } J - A_6 = (J - A_1) - (J - A_2) - (J - A_3) + (J - A_4) + (J - A_5) \in \mathrm{Vect}(J - A_1, \ldots, J - A_5)
\end{aligned}$$

Par suite, $r_3 = \mathrm{rg}(J - A_k)_{1 \leqslant k \leqslant 5}$. Soit alors $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant 5} \in \mathbb{R}^5$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{5} a_k (J - A_k) = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & a_3 + a_4 & a_5 \\ a_3 + a_5 & a_1 & a_2 + a_4 \\ a_4 & a_2 + a_5 & a_1 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 = 0 \\ a_3 + a_4 = 0 \\ a_5 = 0 \\ a_3 + a_5 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 + a_4 = 0 \\ a_4 = 0 \\ a_2 + a_5 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_4 = 0 \\ a_5 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc la famille $(J - A_k)_{1 \leqslant k \leqslant 5}$ est libre et $r_3 = \mathrm{rg}(J - A_k)_{1 \leqslant k \leqslant 5} = 5$.

$$\boxed{r_2 = 1 \text{ et } r_3 = 5.}$$

18) Notons t la transposition dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La transposée d'une matrice ayant exactement deux 1 par ligne et par colonne et des 0 ailleurs est une matrice ayant exactement deux 1 par ligne et par colonne et des 0 ailleurs et puisque X_0 est vecteur propre de chaque $A \in \mathscr{U}_n$ associé à la valeur propre 2, X_0 est vecteur propre de chaque ${}^tA$, $A \in \mathscr{U}_n$, associé à la même valeur propre 2. Ceci montre que $\mathscr{U}_n \subset \mathscr{V}_n$.

Soit $A \in \mathscr{V}_n(\mathbb{R})$ puis $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $AX_0 = \lambda X_0$ et ${}^tAX_0 = \mu X_0$. Alors, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \lambda$ et $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \mu$ puis

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right) = \mu$$

19) $\mathscr{V}_n$ est effectivement un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car $0 \in \mathscr{V}_n$ et si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(A, B) \in (\mathscr{V}_n)^2$, alors $(\alpha A + \beta B)X_0 \in \text{Vect}(X_0)$ et $(\alpha {}^tA + \beta {}^tB)X_0 \in \text{Vect}(X_0)$.

On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. On note $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ puis on pose $e'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{n}}X_0$ et on complète la famille orthonormée (e'_1) en $\mathscr{B}_1 = (e'_1, \dots, e'_n)$ base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}_1$. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.
D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} A \in \mathscr{V}_n &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ Ae'_1 = {}^tAe'_1 = \lambda e'_1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists A' \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})/\ \text{mat}(f, \mathscr{B}_1) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists A' \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})/\ A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Puisque l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\dim(\mathscr{V}_n)(\mathbb{R}) = \dim \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R},\ A' \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}) \right\} = \dim(\text{Vect}(\{E_{1,1}\} \cup \{E_{i,j},\ 2 \leqslant i, j \leqslant n\}) = (n-1)^2 + 1.$$

On en déduit que $r_n = \dim(\text{Vect}(\mathscr{U}_n)) \leqslant \dim(\mathscr{V}_n) = (n-1)^2 + 1$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ r_n \leqslant (n-1)^2 + 1.}$$

20) Soit B la matrice dont tous les coefficients sont ceux de A sauf les coefficients en position (i, j), $1 \leqslant i, j \leqslant 2$, qui sont : $\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le nombre de 1 dans chaque ligne et chaque colonne, y compris les lignes et colonnes n° 1 et 2, sont restés inchangés. Donc la matrice B est un élément de $\mathscr{U}_n$. De plus, la matrice $A - B = (E_{1,1} + E_{2,2}) - (E_{1,2} + E_{2,1})$ a tous ses coefficients nuls sauf ceux en positions (i, j) pour $i \leqslant 2$ et $j \leqslant 2$.

Plus généralement, pour $(i, j) \in [\![2, n]\!]^2$, soit A' (resp. B') la matrice déduite de A en échangeant ses lignes 2 et i et ses colonnes 2 et j. Les matrices A' et B' sont dans $\mathscr{U}_n$ et $A' - B' = (E_{1,1} + E_{i,j}) - (E_{i,1} + E_{1,j})$.

Pour $(i, j) \in [\![2, n]\!]^2$, posons $M_{i,j} = (E_{1,1} + E_{i,j}) - (E_{i,1} + E_{1,j})$.
D'après ce qui précède, $\text{Vect}\{A - B,\ (A, B) \in (\mathscr{U}_n)^2\} \supset \text{Vect}\{M_{i,j},\ (i, j) \in [\![2, n]\!]^2\}$. Vérifions alors que la famille $(M_{i,j})_{2 \leqslant i,j \leqslant n}$ est libre. Soit $(\lambda_{i,j})_{2 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{R}^{(n-1)^2}$.

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} \lambda_{i,j} M_{i,j} = 0 &\Rightarrow \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} \lambda_{i,j} (E_{1,1} + E_{i,j} - E_{i,1} - E_{1,j}) \\ &\Rightarrow \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} \lambda_{i,j} E_{i,j} + \left(\sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} \lambda_{i,j} \right) E_{1,1} - \sum_{i=2}^{n} \left(\sum_{j=2}^{n} \lambda_{i,j} \right) E_{i,1} - \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_{i,j} \right) E_{1,j} = 0 \\ &\Rightarrow \forall (i, j) \in [\![2, n]\!]^2,\ \lambda_{i,j} = 0. \end{aligned}$$

Donc la famille $(M_{i,j})_{2 \leqslant i,j \leqslant n}$ est libre. On en déduit que

$$r'_n = \dim \left(\text{Vect}\{A - B,\ (A, B) \in (\mathscr{U}_n)^2\} \right) \geqslant \text{rg}(M_{i,j})_{2 \leqslant i,j \leqslant n} = (n-1)^2.$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ r'_n \geqslant (n-1)^2.}$$

21) D'après ce qui précède $(n-1)^2 \leqslant r'_n = \text{rg}\{A - B,\ (A, B) \in (\mathscr{U}_n)^2\} \leqslant \text{rg}(\mathscr{U}_n) = r_n \leqslant (n-1)^2 + 1$. Maintenant, la matrice J est dans $\text{Vect}(\mathscr{U}_n)$ car $J = \dfrac{1}{h_n} \displaystyle\sum_{A \in \mathscr{U}_n} A$. Vérifions que J n'est pas dans $\text{Vect}\{A - B,\ (A, B) \in (\mathscr{U}_n)^2\}$. Pour toutes matrices A et B de $\mathscr{U}_n$, on a $(A - B)X_0 = 2X_0 - 2X_0 = 0$ et donc par linéarité, pour tout élément M de $\text{Vect}\{A - B,\ (A, B) \in (\mathscr{U}_n)^2\}$, on a $MX_0 = 0$. Mais la matrice J vérifie $JX_0 = nX_0 \neq 0$ et donc $J \notin \text{Vect}\{A - B,\ (A, B) \in (\mathscr{U}_n)^2\}$.
Finalement, $(n-1)^2 < r_n \leqslant (n-1)^2 + 1$ et donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ r_n = (n-1)^2 + 1.}$$

