A 2011 MATH. II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2011

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Sur le calcul des variations

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, ni vide, ni réduit à un point, et un ensemble E de fonctions $f : I \to \mathbb{R}$. On se donne une application $J : E \to \mathbb{R}$ définie au moyen d'une intégrale faisant intervenir f et ses dérivées. L'objectif de ce problème est d'étudier le minimum éventuel de J sur E :

$$\min_{f \in E} J(f),$$

et de déterminer, dans certains cas particuliers, les points f de E en lesquels J atteint son minimum.

On note $E^k_{a,b}$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^k telles que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. La notation $y^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de la fonction y.

A. Préliminaire

1) On pose $j = \exp(2i\pi/3)$. Que vaut $j^4 + j^2 + 1$?

On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes sur $\mathbb{C}$ et on considère la matrice A de $\mathscr{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Proposer une matrice inversible U et une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ telles que $U^{-1}AU = D$. La méthode choisie pour les obtenir doit être expliquée.

3) En déduire les solutions $X : I \to \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ de l'équation différentielle

$$X' = AX. \tag{1}$$

4) Déterminer l'ensemble des solutions $y : I \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle

$$y^{(4)} + y'' + y = 0 \tag{2}$$

et préciser parmi ces solutions celles qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pourra considérer le vecteur

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}.$$

B. Un lemme de du Bois-Reymond

5) On considère la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = (1 - t^2)^3$ si $|t| \leqslant 1$ et $h(t) = 0$ sinon. Montrer que $h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et représenter son graphe. La fonction h est-elle de classe C^3 sur $\mathbb{R}$?

6) Soit x_0, x_1 des nombres réels tels que $x_0 < x_1$. Construire à partir de h une fonction $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $g(x) > 0$ pour tout $x \in]x_0, x_1[$ et $g(x) = 0$ ailleurs.

7) Soit $F \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 F(x)u(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $u \in E^2_{0,0}$. Démontrer qu'alors F est nulle.

C. Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange

Dans cette partie, on prend $E = E^2_{a,b}$ pour un couple donné (a, b) de nombres réels. La fonction J est définie sur E par la formule

$$J(f) = \int_0^1 \left[P\big(f(x)\big) + Q\big(f'(x)\big)\right] \mathrm{d}x,$$

où $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont des polynômes fixés.

Soit $f_0 \in E$. On se propose de prouver que si $J(f_0) \leqslant J(f)$ pour tout $f \in E$, alors f_0 vérifie une certaine équation différentielle. Soit $u \in E^2_{0,0}$.

8) Montrer que l'application q définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$q(t) = J(f_0 + tu)$$

est polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de nombres réels telle que $q(t) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k t^k$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Expliciter le coefficient a_1 sous la forme d'une intégrale faisant intervenir les polynômes dérivés P' et Q'.

9) On suppose que pour tout $f \in E$, $J(f_0) \leqslant J(f)$. Montrer qu'alors $a_1 = 0$ et en déduire l'équation différentielle :

$$\forall x \in [0,1], \qquad P'\big(f_0(x)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[Q'\big(f_0'(x)\big)\right]. \qquad (\Delta)$$

Exemples

Premier exemple. On choisit $E = E^2_{0,1}$ et $J = J_1$ définie par $J_1(f) = \displaystyle\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x$.

10) Former l'équation différentielle (Δ) correspondante. Parmi ses solutions, préciser celles qui appartiennent à $E^2_{0,1}$.

11) Montrer que J_1 admet un minimum sur $E^2_{0,1}$, préciser sa valeur ainsi que les points de $E^2_{0,1}$ où ce minimum est réalisé. (On pourra s'aider de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

Deuxième exemple. On choisit $E = E^2_{0,0}$ et $J = J_2$ définie par

$$J_2(f) = \int_0^1 \big(f'(x)\big)^2 + \big(f'(x)\big)^3 \,\mathrm{d}x.$$

12) Former l'équation différentielle (Δ) correspondante. Parmi ses solutions, montrer que seule la fonction nulle appartient à $E^2_{0,0}$.

13) Montrer que J_2 n'admet pas de minimum sur $E^2_{0,0}$. (On pourra se servir de la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par la formule $f(x) = x^2(1-x)$.)

D. Un exemple avec dérivée seconde

Dans cette partie, E désigne l'ensemble des fonctions $f \in C^4(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telles que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$. On rappelle que l'ensemble des fonctions $g \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telles que g^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, que l'on note L^2.

Dans les deux questions suivantes, on considère $f \in E$.

14) Montrer que le produit ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(x)f'(x)$ ne tend *pas* vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.

15) En déduire que $f' \in L^2$, puis que $f(x)f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Dans cette partie, la fonction J est définie par

$$J(f) = \int_0^{+\infty} \left[(f(x))^2 - (f'(x))^2 + (f''(x))^2\right] \mathrm{d}x.$$

Par un raisonnement identique à celui de la partie C, on peut montrer, et on l'admettra, que si la fonction J présente un minimum en un élément f de E, alors f est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation (2) : $y^{(4)} + y'' + y = 0$.

16) Déterminer les solutions de (2) qui appartiennent à E. (On pourra d'abord étudier leur appartenance à L^2.)

On note e_1 et e_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par les formules

$$e_1(t) = \mathrm{e}^{-t/2}\cos\Big(t\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \quad \text{et} \quad e_2(t) = \mathrm{e}^{-t/2}\sin\Big(t\frac{\sqrt{3}}{2}\Big).$$

Un calcul montre, et on l'admettra, que pour tous réels α et β,

$$J(\alpha e_1 + \beta e_2) = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3\beta^2}{4} + \frac{\alpha\beta\sqrt{3}}{2}.$$

On pose également, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\psi(t) = \mathrm{e}^{-t/2} \sin\Big(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\Big).$$

17) On suppose, dans cette question, que la fonction J présente un minimum en un élément f de E. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation $y'' + y' + y = 0$. Montrer par ailleurs qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda\psi$.

18) Montrer que pour tout $f \in E$ et tout réel $A > 0$,

$$\int_0^A \Big[\big(f(x)\big)^2 - \big(f'(x)\big)^2 + \big(f''(x)\big)^2\Big]\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^A \big[f(x) + f'(x) + f''(x)\big]^2\,\mathrm{d}x + \big(f(0) + f'(0)\big)^2 - \big(f(A) + f'(A)\big)^2.$$

Quel est le comportement de $\big(f(A) + f'(A)\big)^2$ lorsque $A \to +\infty$? En déduire que la fonction J admet effectivement un minimum au point $\lambda\psi$ pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$.

19) Indiquer comment le point de vue de la question précédente permet de retrouver directement toutes les fonctions $f_0 \in E$ telles que $J(f_0) = \min\limits_{f \in E} J(f)$, sans passer par l'équation différentielle (2).

E. Application : une inégalité de Hardy et Littlewood

On reprend les notations de la partie précédente, et pour tout $g \in L^2$, on note

$$\|g\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} \big(g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}.$$

20) Montrer que pour tout $f \in E$,

$$\|f'\|^2 \leqslant 2\,\|f\| \cdot \|f''\|.$$

On pourra poser $f_\mu(x) = f(\mu x)$ et utiliser le fait que $J(f_\mu) \geqslant 0$, pour *tout* réel $\mu > 0$.

21) Déterminer tous les cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

FIN DU PROBLÈME