Ministère des Enseignements Secondaires **Classe : $T^{le}C$** **Coef : 5** **Durée : 4 heures**

Academic College of Excellence **Évaluation** 1 **trimestre** 2 **25 Janvier** 2020

Épreuve de Mathématiques

L'épreuve comporte trois exercices et un problème étalés sur deux pages numérotées de 1 à 2.

Exercice 1 [3,5 Points]

1. ABC est un triangle équilatéral de sens direct tel que $AB = a$. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = a^2$ puis, l'ensemble (Γ') des points M du plan tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$. **[1,5pt]**
2. On considère dans un repère orthonormé direct $(O; I; J; K)$ les points $A(1; 3; 1)$; $B(-1; 5; 0)$; $C(0; -1; -2)$ et $D(-1; 1; -1)$ avec $OI = 1cm$. Soit $(s) : (x + 3)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 25$.

   a) Vérifier que les points $A; B$ et C forment un plan puis chercher une équation cartésienne de ce plan. **[0,5pt]**

   b) Étudier la position relative de (s) et de (ABC). **[0,5pt]**

   c) Calculer l'aire du triangle ABC. **[0,5pt]**

   d) Vérifier que $ABCD$ est un tétraèdre et calculer son volume. **[0,5pt]**

Exercice 2 [3 Points]

1. On pose $f(x) = \sin^4 x$ et $g(x) = \sqrt{3x - 8}$. Déterminer une primityive de f puis la primitive de g qui s'annule en 4. **[1pt+0,5pt=1,5pt]**
2. En base *dix*, deux nombres s'écrivent $x = a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_0$ et $y = a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 + 5 \times a_0$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer que x est divisible par 7 si et seulement si y est divisible par 7.

   (Cest le test de Chika Ofili, jeune nigérian de 12 ans). **[1,5pt]**

Exercice 3 [3,5 Points]

1. Déterminer l'expression analytique de l'affinité orthogonale d'axe $(D) : x = 3$ et de rapport -2. **[1pt]**
2. Soient ABC un triangle quelconque et f une application affine telle que $f(A) = A$; $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$ où B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$.

   a) Déterminer $f(B')$ et $f\big((BB')\big)$. **[0,5pt]**

   b) L'application f est-elle bijective ? **[0,5pt]**

   c) Déterminer l'expression analytique de f dans le repère $(A; B; C)$. **[1,5pt]**

PROBLEME [10 Points]

PARTIE A : **[2 Points]**

On considère la fonction g définie par $g(x) = -4x^3 - 9x^2 + 16$.

1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β dont on cherchera un encadrement au dizième près. **[1,75pt]**
2. Donner alors le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$. **[0,25pt]**

PARTIE B : **[4,25 Points]**

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^3+8}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative sur un repère orthonormé $(O; I; J)$ d'unité $2cm$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f. **[0,25pt]**
2. Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$ et déduire des asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$. **[1 pt]**
3. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x^3+8)^2}$. **[0,5pt]**
4. Dresser le tableau de variations de f. **[0,5pt]**
5. Tracer $(\mathcal{C}_f)$. **[1pt]**
6. Montrer que $\forall x \in [0;1],\ |f'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$ puis, déduire que sur $[0;1]$, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α. **[1 pt]**

PARTIE C : **[3,75 Points]**

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{{u_n}^3+8}. \end{cases}$

1. Représenter sur le graphe précédent les trois premiers termes de la suite (u_n). **[0,25pt]**
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0;1]$. **[0,5pt]**
3. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante et conclure. **[0,75pt]**
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$. **[0,5pt]**
5. Déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{4^n}$ et déduire la limite de la suite (u_n) .**[0,5pt+0,25pt=0,75pt]**
6. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α au centième près et déduire une valeur approchée de α au centième près. **[0,5ptX2=1pt]**

Examinateur : NGUEFO Amour , ***PLEG mathématiques***